

Algebraische Kategorien und Dualitäten

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
HANS-EBERHARD PORST
aus Uslar

BREMEN 1972

Gutachter: Prof. Dr. H. Herrlich
Prof. Dr. J. Timm

Algebraische Kategorien und Dualitäten

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Universität Bremen

vorgelegt von
HANS-EBERHARD PORST
aus Uslar

BREMEN 1972



I N H A L T

EINLEITUNG	0
TERMINOLOGIE UND NOTATION	3
KAPITEL I: EINIGE KLASSEN VON KATEGORIEN	
1. Konkrete Kategorien	5
2. Varietale Kategorien	10
3. Algebraische Kategorien	12
4. Der Rang einer Kategorie	19
5. Lokal präsentierbare Kategorien	22
6. Zusammenfassung	24
KAPITEL II: EINE DUALITÄTSTHEORIE	
1. Der Dualitätssatz von Linton	26
2. Eine Dualitätstheorie für eine Klasse algebraischer Kategorien	28
KAPITEL III: ANWENDUNGEN	
1. Eigenschaften algebraischer Kategorien mit einer Dualen	34
2. Beispiele	38
LITERATURVERZEICHNIS	40



Digitized by the Internet Archive
in 2026

EINLEITUNG

J. Gray meinte nach Erscheinen von Linton's Arbeit "Applied functorial semantics I" [Li 3], daß die hierin aufgewiesene Möglichkeit, die bekannten Dualitäten der Mathematik, wie zum Beispiel die Stone-Dualität, mit kategoriellen Hilfsmitteln zu erhalten, ein beträchtlicher Erfolg der Kategoriethorie sei und ihre Möglichkeiten deutlich demonstriere. Wenn dies so verstanden wurde, daß mit kategoriellen Mitteln elegante Beweise der klassischen Dualitätstheoreme zu gewinnen seien, liegt hierin allerdings eine Überinterpretation der vorhandenen Möglichkeiten, denn eine etwas detailliertere Betrachtung zeigt, daß im konkreten Fall gerade das Nachweisen der für die Lintonsche Konstruktion notwendigen Eigenschaften der betrachteten Kategorien - zum Beispiel die Existenz eines injektiven Kogenerators - nichts anderes ist, als das Nachvollziehen der wesentlichen Teile der klassischen Beweise.

Die wirkliche Bedeutung der Lintonschen Arbeit ist jedoch unter einem etwas anderen, dem Selbstverständnis der Kategoriethorie auch viel eher entsprechenden Aspekt zu sehen. Lintons Ergebnis läßt sich nämlich verwenden als Ansatz zur Entwicklung einer Theorie der Dualitäten für eine bestimmte Klasse von Kategorien.

Genauer ist mit einer solchen Dualitätstheorie folgendes gemeint:

- I. Abgrenzung einer geeigneten Klasse K von Kategorien, so daß möglichst viele der Kategorien, für die Dualitäten bekannt sind, zu K gehören, daß mit $\underline{A} \in K$ auch $\underline{A}^0 \in K$, und daß aus $\underline{A}^0 \in K$ auf "interessante" Eigenschaften von $\underline{A}$ geschlossen werden kann.

II. Konstruktion einer Dualität $D_{\underline{A}}: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{A}'$, $D_{\underline{A}'}: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}^0$
 für $\underline{A} \in K$, die samt der Dualitätstransformationen gerade
 von der aus den konkreten Fällen bekannten Gestalt ist.

Daß eine solche Dualitätstheorie bis heute noch nicht entwickelt wurde, obwohl die Kategorietheorie gerade bei der Dualität von Vektorräumen ihren historischen Ursprung hat, dürfte vor allem an der Schwierigkeit liegen, I. und II. gleichzeitig zu erfüllen - gestattet die Klasse K Existenzaussagen für Dualitäten, so ist sie zu "groß", um ergiebige Schlüsse aus der Existenz einer Dualität zu erlauben (wie die Klasse aller Kategorien); ist K "hinreichend klein", findet man keine Existenzsätze für Äquivalenzen beziehungsweise Dualitäten.

Zwar könnte im Konzept der abelschen Kategorien eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems liegen - die Ergebnisse dieser Arbeit erhärten eine solche Vermutung -, doch fehlt hier noch ein geeignetes Konzept, daß Äquivalenzen liefert; die Morita-Sätze scheinen für diese allgemeine Fragestellung nicht stark genug.

Eine Lösungsmöglichkeit liegt in dem Konzept der tripelbaren (variationalen) Kategorien, auf die sich auch [Li 3] bezieht - wenngleich, wie unten ausgeführt wird, die Klasse der variationalen Kategorien selbst zu klein ist.

Die auf dieser Basis in Kapitel II entwickelte Dualitätstheorie umfaßt dann zwar einen großen Teil der bekannten Dualitäten (zum Beispiel: Stone-Dualität, Pontrjagin-Dualität), allerdings gelingt es nicht, die Dualitäten für Kategorien endlich erzeugter Moduln einzubeziehen.

Entsprechend der angegebenen Fragestellung werden im Kapitel I zunächst verschiedene Klassen von Kategorien unter dem Gesichtspunkt ihrer Verwendbarkeit für eine Dualitätstheorie klassifiziert, allerdings wesentlich im Hinblick auf das oben angesprochene Konzept der variationalen Kategorien. In I.3. werden dabei die hier sogenannten "algebraischen Kategorien" ausführlich untersucht, da es gerade diese sind, für die

sich eine Dualitätstheorie entwickeln läßt, was im Kapitel II geschieht.

Das III. Kapitel ist Anwendungen und Beispielen gewidmet. Insbesondere ergibt sich hier, daß algebraische Kategorien, die Dualitäten gestatten, "meistens" abelsch sind - woraus die anfangs geäußerte Vermutung fließt, daß auch die Klasse der abelschen Kategorien Ausgangspunkt einer Dualitätstheorie sein könnte -, sowie die Ausweitung eines Ergebnisses von Gabriel und Ulmer [G/U], daß nämlich die Duale einer nicht-trivialen algebraischen Kategorie mit Rang, sofern diese auch algebraisch ist, keinen Rang hat.

TERMINOLOGIE UND NOTATION

Unter einer Kategorie $\underline{A}$ wird, wie üblich, eine Klasse von Objekten $Ob\underline{A}$ und eine Klasse von Morphismen $Mor\underline{A}$ mit den üblichen Verknüpfungen verstanden. Für Objekte $A, B \in Ob\underline{A}$ bilden die Morphismen von A nach B eine Menge, die mit $\underline{A}(A, B)$ bezeichnet wird. $\underline{A}^0$ ist die zu $\underline{A}$ duale Kategorie.

Was dualisierbare Eigenschaften und Begriffe betrifft, wird konsequent die "Kosprache" benutzt; insbesondere sind rechtsadjungierte Funktoren "koadjungierte", Unterkategorien, deren Einbettung einen Koadjungierten hat, "koreflexiv", direkte Limiten "filtrierende Kolimiten" u.s.w.

Ein regulärer Epimorphismus ist ein Epimorphismus, der Kokern eines Morphismenpaares ist; dual: regulärer Monomorphismus. Ein regulär-projektiver Generator ist ein Generator, der nur projektiv bezüglich regulärer Epimorphismen ist; dual: regulär injektiver Kogenerator. Eine (regulär epi, mono)-Faktorisierung eines Morphismus f ist eine Faktorisierung $f = m \circ e$, wobei e ein regulärer Epimorphismus, m ein Monomorphismus ist.

Ein Pinsel ist eine Familie von Morphismen $(f_i: X \longrightarrow X_i)$; (f_i) heißt Mono-Pinsel, wenn für Morphismen f, g aus $f_i f = f_i g$ schon $f = g$ folgt; dual: Epi-Kopinsel.

Es bezeichnet stets $\underline{S}$ die Kategorie der Mengen und Abbildungen. Für einen Funktor $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}$, der einen Adjungierten F hat, heißt ein $\underline{A}$ -Objekt der Form $F(X)$ U -frei über X ($X \in Ob\underline{S}$); mit $\langle U \rangle$ wird das durch U und F erzeugte Tripel bezeichnet.

Ist $\mathbb{T}$ ein Tripel in $\underline{S}$, so bezeichnet $\underline{S}^{\mathbb{T}}$ die Kategorie der $\mathbb{T}$ -Algebren, $U_{\mathbb{T}}: \underline{S}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{S}$ den zugehörigen Vergißfunktors, $F_{\mathbb{T}}: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}^{\mathbb{T}}$ den Adjungierten zu $U_{\mathbb{T}}$. Ist $\mathbb{T} = \langle U \rangle$, so bezeichnet $\Phi_U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}^{\mathbb{T}}$ den Vergleichsfunktors, $\psi_U: \underline{S}^{\mathbb{T}} \longrightarrow \underline{A}$ seinen Adjungierten, falls dieser existiert.

Ein Generator G in $\underline{A}$ heißt *e c h t*, falls $\underline{A}(G, -)$ Isomorphismen bewahrt und reflektiert.

Eine Dualität für eine Kategorie $\underline{A}$ ist eine Kategorie $\underline{B}$ zusammen mit zwei Funktoren $D: \underline{A}^0 \rightarrow \underline{B}$ und $D': \underline{B} \rightarrow \underline{A}^0$, so daß $D'D \simeq 1_{\underline{A}^0}$ und $DD' \simeq 1_{\underline{B}}$.

$\mathbb{1}$ bezeichnet die Kategorie $\mathcal{Q}$; $\mathbb{2}$ die Kategorie $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$.

KAPITEL I: EINIGE KLASSEN VON KATEGORIEN

Ausgangspunkt für eine Dualitätstheorie sind die in den verschiedenen Bereichen der Mathematik auftretenden Dualitäten, die ja in möglichst großer Zahl von der zu entwickelnden Theorie erfaßt werden sollen. Dies sind insbesondere

1. Die Dualität zwischen der Kategorie der kompakten und der Kategorie der diskreten abelschen Gruppen.
2. Die Dualität der Kategorie der lokalkompakten abelschen Gruppen mit sich selbst.
3. Die Morita-Dualitäten zwischen Kategorien endlich erzeugter Moduln.
4. Die Dualität zwischen der Kategorie der Booleschen Algebren und der Kategorie der nulldimensionalen kompakten Räume.
5. Die Dualität zwischen der Kategorie der kompakten Räume und der Kategorie der kommutativen C^* -Algebren mit Identität.

Diese Beispiele legen nahe, zunächst konkrete Kategorien zu untersuchen. Es zeigt sich dann darüberhinaus, daß sich bereits hier vollständige Aussagen über die Eindeutigkeit und die Gestalt von Dualitäten machen lassen.

1. Konkrete Kategorien

DEFINITION 1: Sei $\underline{A}$ eine Kategorie und $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}$ ein treuer Funktor. Dann heißt $(\underline{A}, U)$ eine konkrete Kategorie. U wird Vergißfunktor genannt.

In diesem Sinne sind alle oben genannten Kategorien konkret. Andererseits ist klar, daß die Klasse aller konkreten Kategorien unter dem Gesichtspunkt der Dualitäten zu groß ist. Die erste natürliche Einschränkung, die garantiert,

daß U Limites bewahrt, ist, von den Vergißfunktoren zu verlangen, daß sie repräsentierbar sind, daß also insbesondere $\underline{A}$ einen Generator hat. Zu diesem Typ von Kategorien gehören sicher die unter 1. - 5. genannten Kategorien ¹⁾.

Ist $(\underline{A}, U)$ eine konkrete Kategorie mit $U \simeq \underline{A}(A, -)$, so ist $\underline{A}$ U -frei für $1 = \{\emptyset\}$; U hat also einen Adjungierten (das heißt $\underline{A}$ hat U -freie Objekte), wenn $\underline{A}$ Kopotenzen hat. U bewahrt und reflektiert Monomorphismen; Epimorphismen werden im allgemeinen nur reflektiert.

Für konkrete Kategorien mit repräsentierbarem Vergißfunktoren ist nun schon eine sehr genaue Beschreibung der Gestalt möglicher Dualitäten beweisbar.

SATZ 1: Seien $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{B}, V)$ konkrete Kategorien mit $U = \underline{A}(A_1, -)$, $V = \underline{B}(B_1, -)$.

Gibt es dann Funktoren $S: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{B}$, $T: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^0$ mit $TS \simeq 1_{\underline{A}^0}$, $ST \simeq 1_{\underline{B}}$, so gibt es $A_0 \in \text{Ob } \underline{A}$, $B_0 \in \text{Ob } \underline{B}$ mit

- $VS = \underline{A}(-, A_0)$, $UT = \underline{B}(-, B_0)$
- $UA_0 = VB_0 = VSA_1$
- A_0 (B_0) ist Kogenerator in $\underline{A}$ ($\underline{B}$) und injektiv bezüglich $\{f \in \text{Mor } \underline{A} \mid VSf \text{ surjektiv}\}$ ($\{f \in \text{Mor } \underline{B} \mid U Tf \text{ surjektiv}\}$)

Beweis:

Zunächst ist, da S und T Äquivalenzinvers zueinander (also adjungiert) sind, $\underline{A}^0(TB, A) \simeq \underline{B}(B, SA)$ für $A \in \text{Ob } \underline{A}$, $B \in \text{Ob } \underline{B}$. Setze dann $A_0 = TB_1$, $B_0 = SA_1$; dann folgt

$$a. VS = \underline{B}(B_1, S-) = \underline{A}^0(TB_1, -) = \underline{A}(-, A_0)$$

$$UT = \underline{A}(A_1, T-) = \underline{A}^0(T-, A_1) = \underline{B}(-, B_0)$$

$$b. VB_0 = VSA_1 = \underline{B}(B_1, SA_1) = \underline{A}^0(TB_1, A_1) = \underline{A}(A_1, TB_1) = UA_0$$

c. $SA_0 = STB_1 \simeq B_1$ ist V -frei über $1 = \{\emptyset\}$ in $\underline{B}$, also Generator und surjektiv projektiv. Daraus folgt die Behauptung, da $\underline{A} \simeq \underline{B}^0$. Entsprechend folgt die Behauptung für B_0 . ♦

1) Zum Vergißfunktoren bei 5. siehe S. 32

Bemerkung: Insbesondere ist also unter den Voraussetzungen von Satz 1 ($\underline{A}^0, \underline{A}(-, A_0)$) wieder eine konkrete Kategorie.

Die bekannte Form von Dualitätsfunktoren ist also gemäß Satz 1 zwangsläufig. Dasselbe gilt im übrigen für die Form

Noch anschaulicher in Bezug auf die Gestalt von Dualitäten wird die Aussage von Satz 1 in folgendem

KOROLLAR: Hat $\underline{B}$ Produkte, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 1:

Zu jedem $A \in \text{Ob } \underline{A}$ gibt es einen Monomorphismus $m_A: SA \rightarrow B_0^{UA}$, so daß $Vm_A: VSA \rightarrow UA_0^{UA} = \underline{S}(UA, UA_0)$ injektiv ist; (m_A) ist sogar eine natürliche Transformation.

Beweis:

Da B_0 Kogenerator in $\underline{B}$ ist, gibt es zu $A \in \text{Ob } \underline{A}$ einen Monomorphismus $m'_A: SA \rightarrow B_0^{\underline{B}(SA, B_0)}$; da S voll und treu ist, sind $B_0^{\underline{B}(SA, B_0)}$ und B_0^{UA} natürlich (in A) äquivalent. Sei dann m_A Kompositum von m'_A und diesem Isomorphismus. Da V Limiten bewahrt, bewahrt V insbesondere Monomorphismen und Produkte, so daß $V(B_0^{UA}) = (VB_0)^{UA} = UA_0^{UA}$. Die Natürlichkeit von (m_A) folgt natürlich! ♦

Die bekannte Form von Dualitätsfunktoren ist damit also zwangsläufig. Dasselbe gilt im übrigen für die Form der Dualitätstransformationen, denn es gilt unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Satz 1:

SATZ 2: Es gibt eine natürliche Äquivalenz $\lambda: 1_{\underline{B}} \rightarrow ST$ also $V\lambda: V \xrightarrow{\sim} VST = \underline{B}(B_1, -) \rightarrow \underline{A}(T-, TB_1)$, so daß für $x \in VB$, $B \in \text{Ob } \underline{B}$, $f \in \underline{B}(B, B_0)$ gilt:
 $(*) \quad U(V\lambda_B(x))(f) = f \circ x = Vf(x).$

Beweis:

Bekanntlich kann man die Äquivalenztransformation λ so wählen, daß λ universell ist (T als Adjungierter von S aufgefaßt). Identifiziert man dann $\underline{B}(B_1, STB)$ und $\underline{A}(TB, TB_1)$ vermöge Adjunktion, so ist für $x \in VB$: $V\lambda_B(x) = Tx$. Der Rest ist einfache Rechnung. ♦

Da U und V treu sind folgt:

KOROLLAR: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 wird durch (*) eine natürliche Äquivalenz $\lambda: 1_{\underline{B}} \longrightarrow ST$ definiert.

Auch die Frage nach der Eindeutigkeit von Dualitäten läßt sich bereits im Rahmen der konkreten Kategorien mit repräsentierbarem Vergißfunktoren vollständig beantworten. Natürlich ist (bis auf Äquivalenz) die Duale einer Kategorie eindeutig bestimmt; dies gilt allerdings nicht für konkrete Kategorien, wenn man einen schärferen, diesen adäquaten Äquivalenzbegriff zugrunde legt:

DEFINITION 2: Ein Funktor zwischen konkreten Kategorien $(\underline{A}, U)$, $(\underline{B}, V)$ (Funktor über $\underline{S}$) ist ein Funktor $F: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, so daß $VF \cong U$. Eine Äquivalenz zwischen konkreten Kategorien $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{B}, V)$ ist ein Funktor $F: (\underline{A}, U) \longrightarrow (\underline{B}, V)$, der einen Äquivalenzinversen besitzt, der ebenfalls ein Funktor zwischen konkreten Kategorien ist.

Natürlich ist ein Funktor zwischen konkreten Kategorien schon dann eine Äquivalenz zwischen konkreten Kategorien, wenn er eine Äquivalenz im üblichen Sinne ist. Allerdings ist im allgemeinen eine Äquivalenz zwischen zwei Dualen einer konkreten Kategorie keine Äquivalenz zwischen konkreten Kategorien (wegen Satz 3b, da es konkrete Kategorien mit verschiedenen Generatoren gibt). Genauer gilt:

SATZ 3: Seien $(\underline{A}, U)$, $(\underline{B}, V)$, $(\underline{C}, W)$ konkrete Kategorien mit $U = \underline{A}(A_1, -)$, $V = \underline{B}(B_1, -)$, $W = \underline{C}(C_1, -)$ und $S: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{B}$, $T: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^0$, $F: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{C}$, $G: \underline{C} \longrightarrow \underline{A}^0$ Funktoren mit $TS \cong 1_{\underline{A}^0}$, $ST \cong 1_{\underline{B}}$, $GF \cong 1_{\underline{A}^0}$, $FG \cong 1_{\underline{C}}$.

Dann gilt:

a. Eine Äquivalenz $I: \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ ist eine Äquivalenz zwischen $(\underline{B}, V)$ und $(\underline{C}, W)$ genau dann, wenn $IB_1 = C_1$.

- b. Es gibt eine Äquivalenz $I: (\underline{B}, V) \longrightarrow (\underline{C}, W)$ genau dann, wenn $TB_1 = GC_1$.
- c. Gibt es eine Äquivalenz $I: \underline{B} \longrightarrow \underline{D}$, so ist $(\underline{D}, \underline{D}(IB_1, -))$ eine konkrete Kategorie, und es gilt $(\underline{B}, V) \simeq (\underline{D}, \underline{D}(IB_1, -))$.

Beweis:

Geradeaus



Die für eine Dualitätstheorie noch fehlende Existenzaussage liegt zwar auf der Hand - $(\underline{A}, \underline{A}(A, -))$ hat in der Klasse der konkreten Kategorien eine Duale genau dann, wenn $\underline{A}$ einen Kogenerator besitzt -, doch hilft das recht wenig, da die Erkenntnis, daß die Duale einer vorgegebenen konkreten Kategorie $(\underline{A}, U)$ konkret ist, keine relevanten Schlüsse auf Eigenschaften von $(\underline{A}, U)$ zuläßt.

Eine kleinere und unter diesem Aspekt interessantere Klasse von Kategorien bilden die varietalen Kategorien, bei denen darüberhinaus aufgrund des Tripelbarkeitstheorems auch Existenzaussagen erwartet werden können. Deshalb werden nun kurz die wichtigsten und im folgenden benötigten Eigenschaften varietaler Kategorien zusammenstellen.

2. Varietale Kategorien

Linton definiert varietale Kategorien zwar konstruktiv [Li 1], gibt aber dann eine Charakterisierung an [Li 1], die eine axiomatische Einführung der varietalen Kategorien erlaubt.

DEFINITION: Eine konkrete Kategorie $(\underline{A}, U)$ heißt *varieta l*, falls

- V1. $\underline{A}$ Kokerne und Kongruenzrelationen hat
- V2. U einen Adjungierten hat
- V3. U reguläre Epimorphismen bewahrt und reflektiert
- V4. U Kongruenzrelationen bewahrt und reflektiert

Bekanntlich deckt sich das Konzept der varietalen Kategorien mit dem Beck'schen Konzept der tripelbaren Kategorien; genauer ist eine konkrete Kategorie $(\underline{A}, U)$ genau dann varieta l, wenn U tripelbar ist. Im Detail gilt [Li 2,3]:

THEOREM 1: Sei $(\underline{A}, U)$ eine konkrete Kategorie, habe U einen Adjungierten F und seien $\eta: 1_{\underline{S}} \longrightarrow UF$, $\beta: FU \longrightarrow 1_{\underline{A}}$ die Adjunktionen, $T = (UF, \eta, U\beta F)$ das durch U und F erzeugte Tripel, $\Phi_U = \underline{A} \longrightarrow \underline{S}^T$ der Vergleichsfunktor und $U_T: \underline{S}^T \longrightarrow \underline{S}$ der Vergißfunktör. Dann gelten folgende Implikationen:

- a. V1 $\implies \Phi_U$ hat einen Adjungierten Ψ_U
- b. $V1 \wedge V3 \implies$ Die Adjunktion $\Psi_U \Phi_U \longrightarrow 1_{\underline{A}}$ ist eine Äquivalenz, und für die Adjunktionsmorphis men $u_X: X \longrightarrow \Phi_U \Psi_U X$ ($X \in \text{Ob } \underline{S}^T$) ist $U_T u_X$ surjektiv.
- c. $V1 \wedge V3 \implies$ Ist $X \longrightarrow \Phi_U Y_i$ ein Mono-Pinsel in $\underline{S}^T$, so ist $X \simeq \Phi_U \Psi_U X$.
- d. $V1 \wedge V3 \wedge V4 \implies$ Die Adjunktion $1_{\underline{S}^T} \longrightarrow \Phi_U \Psi_U$ ist ebenfalls eine Äquivalenz, und somit gilt $\underline{A} \simeq \underline{S}^T$.
- e. $\Phi_U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}^T$ ist eine Äquivalenz $\implies V1 \wedge V3 \wedge V4$.

Bemerkung: $\tilde{\phi}_U: (\underline{A}, U) \longrightarrow (\underline{S}^T, U_T)$ ist ein Funktor zwischen konkreten Kategorien; insbesondere ist also die Äquivalenz in d. eine Äquivalenz zwischen konkreten Kategorien. ¹⁾

Dieses Theorem ist genau von der Art, wie es für eine Dualitätstheorie benötigt wird, da es zu einer gegebenen Kategorie mit bestimmten Eigenschaften eine äquivalente Kategorie samt Äquivalenzfunktoren anzugeben vermag. So greift auch ein Satz von Linton [Li 3], der Dualitäten zu liefern in der Lage ist, auf Theorem 1 zurück (siehe II.1.). Allerdings ist die Klasse der varietalen Kategorien schon etwas klein für eine solche Theorie, da zum einen die Duale einer varietalen Kategorie nicht wieder varietal zu sein braucht, und zum anderen interessante Kategorien nicht varietal sind (siehe zum Beispiel die Stone-Dualität). Dieses Beispiel zusammen mit Theorem 1 legen auch schon einen Versuch zur Vergrößerung der Klasse der varietalen Kategorien nahe, nämlich das Fortlassen des Axioms V4. Zuvor jedoch noch einige wesentliche Eigenschaften varietaler Kategorien [zum Beispiel Sch 2]:

Ist $(\underline{A}, U)$ eine varietale Kategorie so gilt:

- A ist vollständig
- U reflektiert Limiten
- A ist kovollständig
- A ist lokal klein
- A ist regulär lokal koklein und lokal koklein, falls U Epimorphismen bewahrt
- A hat (reguläre epi, mono)-Faktorisierungen und U bewahrt und reflektiert diese
- Der Adjungierte von U bewahrt Monomorphismen.

1) Es ist sogar $U_T \tilde{\phi}_U = U$

3. Algebraische Kategorien

DEFINITION 4: Eine konkrete Kategorie $(\underline{A}, U)$ heißt algebraisch, wenn gilt:

- a. $\underline{A}$ hat Kokerne
- b. U hat einen Adjungierten
- c. U bewahrt und reflektiert reguläre Epimorphismen.

Ehe der Zusammenhang zwischen algebraischen und varietalen Kategorien hergestellt wird, sollen zunächst einige unmittelbar aus der Definition folgende Eigenschaften algebraischer Kategorien festgehalten werden.

1. Der Vergißfunktork einer algebraischen Kategorie ist repräsentierbar; ist nämlich F der Adjungierte zu U , so ist $U = \underline{A}(F1, -)$. Der Generator $F1$ ist darüberhinaus regulär projektiv, weil er U -frei über $1 = \{\emptyset\}$ ist.
2. Der Vergißfunktork einer algebraischen Kategorie bewahrt Limiten (weil er einen Adjungierten hat), weshalb er insbesondere, da er auch treu ist, Monomorphismen bewahrt und reflektiert.
3. Das folgende Theorem zeigt insbesondere, daß in der Linton-schen Charakterisierung varietaler Kategorien die Forderung der Existenz von Kongruenzrelationen überflüssig ist, so daß sich die algebraischen Kategorien von den varietalen gerade in der in 2. angegebenen Weise unterscheiden.
Zunächst sei jedoch eine unmittelbar einsichtige Verallgemeinerung von [He 2, Prop. 1] angeführt:

LEMMA: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, sind (X, g_i) und (Y, m_i) Pinsel in $\underline{A}$, so daß (UY, Um_i) ein Monopinsel in $\underline{S}$ ist, und ist $h: UX \rightarrow UY$ eine Abbildung mit $Ug_i = Um_i h$ für jedes i , so gibt es genau einen $\underline{A}$ -Morphismus $\bar{h}: X \rightarrow Y$ mit $U\bar{h} = h$.

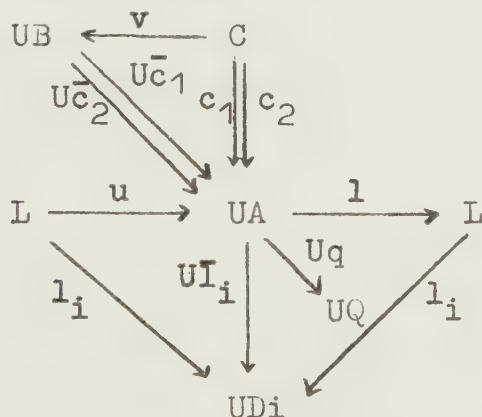
THEOREM 2: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, so ist $\underline{A}$ vollständig, und U bewahrt und reflektiert Limiten.

Beweis:

1. Da U treu ist, folgt mit Hilfe obigen Lemmas, daß U Limiten reflektiert.

2. Da U einen Adjungierten hat, bewahrt U Limiten.

3. Sei $D: \underline{I} \rightarrow \underline{A}$ ein Diagramm und (L, l_i) Limes von UD in $\underline{S}$. Sei dann (u, A) U -universell für L und für jedes i $\bar{l}_i: A \rightarrow D_i$ der durch l_i eindeutig bestimmte Morphismus mit $U\bar{l}_i \cdot u = l_i$. Da für $f \in \underline{I}(i, j)$ gilt: $U\bar{l}_j \cdot u = l_j = Udf \cdot l_i = U(Df \cdot \bar{l}_i)u$, folgt $\bar{l}_j = Df \cdot \bar{l}_i$, so daß $(A, \bar{l}_i)$ eine untere Grenze für D und somit $(UA, U\bar{l}_i)$ eine untere Grenze für UD ist. Es gibt also einen eindeutig bestimmten Morphismus $l: UA \rightarrow L$ mit $U\bar{l}_i = l_i \cdot l$, woraus $l_i \cdot lu = l_i$ folgt. Also ist $lu = 1_L$ und somit l ein regulärer $\underline{S}$ -Epimorphismus. Sei dementsprechend $(1, L)$ der Kokern von $c_1, c_2: C \rightarrow UA$, (v, B) U -universell für C und (q, Q) der Kokern der durch die c_k ($k = 1, 2$) induzierten Morphismen $\bar{c}_k: B \rightarrow A$.



Man rechnet sofort $Uq \cdot c_1 = Uq \cdot c_2$ nach, so daß ein eindeutig bestimmtes $h: L \rightarrow UQ$ mit $Uq = hl$ existiert. Da weiter für jedes i $U(\bar{l}_i \bar{c}_1)v = U(\bar{l}_i \bar{c}_2)v$ gilt, gibt es zu jedem i ein $q_i: Q \rightarrow D_i$ mit $\bar{l}_i = q_i q$. Da dann $(Uq_i)hl = U\bar{l}_i = l_i \cdot l$ und l regulär ist, gilt $(Uq_i)h = l_i$ für jedes i ; damit ist h injektiv und somit eine Bijektion.

Folglich ist (UQ, Uq_i) Limes von UD und damit (Q, q_i) Limes von D , da U Limiten reflektiert. ♦

4. Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, so ist $\underline{A}$ äquivalent zu einer vollen, reflektiven, bezüglich Unterobjekten abgeschlossenen Unterkategorie einer varietalen Kategorie.

Genauer: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, und bezeichnet $\bar{\Phi}_U \underline{A}$ die volle Unterkategorie von $\underline{S}^T$, deren Objekte gerade die isomorphen Exemplare von Objekten der Form $\bar{\Phi}_U A$ ($A \in \text{Ob } \underline{A}$) sind, $E: \bar{\Phi}_U \underline{A} \rightarrow \underline{S}^T$ die Einbettung,¹⁾ so ist der Funktor $\bar{\Phi}'_U$ mit $E \circ \bar{\Phi}'_U = \bar{\Phi}_U$ eine Äquivalenz

$\bar{\Phi}'_U: (\underline{A}', U) \xrightarrow{\sim} (\bar{\Phi}_U \underline{A}, U_T E)$ zwischen konkreten Kategorien. Dies folgt unmittelbar aus 2.

$\bar{\Phi}_U \underline{A}$ ist dann gegen Bildung von Unterobjekten und Produkten in $\underline{S}^T$ abgeschlossen (s. Theorem 3).

5. Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, so ist $\underline{A}$ ferner kovollständig, lokal klein und regulär-lokal-koklein und hat (regulär epi, mono)-Faktorisierungen, die von U bewahrt und reflektiert werden; dies folgt unmittelbar aus 4. und den entsprechenden Eigenschaften varietaler Kategorien.

6. Ein Epimorphismus in einer algebraischen Kategorie ist genau dann extrem, wenn er regulär ist.

Als Funktoren zwischen algebraischen Kategorien sind nach 1. sinnvollerweise die Funktoren zwischen den konkreten Kategorien anzusehen. Für diese gilt der wichtige

SATZ 4: Sind $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{B}, V)$ algebraische Kategorien und ist $F: (\underline{A}, U) \rightarrow (\underline{B}, V)$ ein Funktor, so gilt:

- a. F hat einen Adjungierten
- b. F bewahrt und reflektiert reguläre Epimorphismen.

1) T sei das durch U und seinen Adjungierten erzeugte Tripel;

Sicher bewahrt und reflektiert F reguläre Epimorphismen und Limiten, da U und V das tun. Da $\underline{A}$ lokal klein ist, bleibt also nur noch zu zeigen, daß jedes $B \in \text{Ob } \underline{B}$ nur eine Menge nicht-äquivalenter $\underline{A}$ -Objekte bezüglich F erzeugt.

Sei also $B \in \text{Ob } \underline{B}$ und A $\underline{U}$ -frei über $V B$ und erzeuge $g: B \rightarrow F \bar{A}$ das Objekt $\bar{A} \in \text{Ob } \underline{A}$. Es reicht zu zeigen, daß $\bar{A}$ ein regulärer Quotient von A ist. Sei $\bar{g}: A \rightarrow \bar{A}$ der vermöge Adjunktion g entsprechende Morphismus und $A \xrightarrow{e} D \xrightarrow{m} \bar{A}$ die (reguläre epi, mono)-Faktorisierung von $\bar{g}$. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} VB & \xrightarrow{u} & UA = VFA & \xrightarrow{VFe} & VFD & 1) \\ & \searrow Vg & & \searrow U\bar{g} & \swarrow VFm \\ & & U\bar{A} & = & V\bar{F}\bar{A} \end{array}$$

Nach obigem Lemma gibt es genau ein $h \in \underline{B}(B, FD)$ mit $V(h) = VF \circ u$. Da V treu ist folgt: $g = Fm \circ h$. Da $g \in A$ erzeugt, ist m ein Isomorphismus und somit $\bar{g}$ ein regulärer Epimorphismus. $\blacksquare$

Dies ist eine weitergehende Verallgemeinerung entsprechender Sätze von Lawvere und Linton und legt folgende Definition nahe:

DEFINITION 5: Ein Funktor heißt **a l g e b r a i s c h**, wenn er einen Adjungierten besitzt und reguläre Epimorphismen bewahrt und reflektiert.

SATZ 5: Algebraische Funktoren sind treu und bewahren und reflektieren (reguläre epi, mono)-Faktorisierungen. Ferner ist jedes Kompositum algebraischer Funktoren algebraisch.

¹⁾ Daß nur $U \simeq VF$ gilt, stört hier, wie man leicht sieht, überhaupt nicht.

Beweis:

Sei $S: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ ein algebraischer Funktor und $f, g \in \underline{A}(A, B)$ mit $Sf = Sg$. Ist dann (u, C) S -universell für SA , so gibt es genau ein $h \in \underline{A}(C, A)$ mit $Sh \circ u = 1_{SA}$. $Sf = Sg$ impliziert dann $fh = gh$ und somit $f = g$, da S reguläre Epimorphismen reflektiert. Damit folgt dann das angegebene Verhalten algebraischer Funktoren gegenüber Faktorisierungen direkt aus der Definition. ♦

KOROLLAR: Ist $\underline{A}$ eine Kategorie mit Kokernen und

$U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}$ ein Funktor, so sind äquivalent:

1. $(\underline{A}, U)$ ist eine algebraische Kategorie
2. U ist ein algebraischer Funktor

Mit diesen Bemerkungen über algebraische Funktoren läßt sich nun die an 3. anschließende Frage nach der Charakterisierung solcher Unterkategorien varietaler - oder allgemeiner: algebraischer - Kategorien, die selbst wieder algebraisch sind, beantworten. Dies ist vor allem auch im Hinblick auf die Konstruktion von Dualitäten von Bedeutung, da sich die Dualen gerade als Unterkategorien varietaler Kategorien ergeben werden.

Zunächst gilt:

SATZ 6: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und $\underline{B}$ eine volle Isomorphie-abgeschlossene Unterkategorie von $\underline{A}$ mit der Einbettung $E: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$, so ist $(\underline{B}, UE)$ genau dann algebraisch, wenn $\underline{B}$ reflektiv in $\underline{A}$ ist und die (regulär epi, mono)-Faktorisierungen von $\underline{B}$ -Morphismen in $\underline{A}$ zu $\underline{B}$ gehören.

Beweis:

Sei $(\underline{B}, UE)$ algebraisch. Nach Satz 4 hat E einen Adjungierten. Mit Satz 5 folgt der Rest der Charakterisierung.

Sei nun umgekehrt $\underline{B}$ wie oben charakterisiert. Nach den bisherigen Ergebnissen über algebraische Funktoren

reicht es zu zeigen, daß $\underline{E}$ reguläre Epimorphismen bewahrt und reflektiert.

Zunächst ist ein regulärer $\underline{B}$ -Epimorphismus auch regulär in $\underline{A}$, da seine (reguläre epi, mono)-Faktorisierung in $\underline{B}$ liegt und eindeutig ist.

Ist weiter g ein $\underline{A}$ -regulärer $\underline{B}$ -Epimorphismus, so ist g Kokern von (p,q) , falls

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{p} & \bullet \\ q \downarrow & & \downarrow g \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array}$$

ein Pullback-Diagramm in $\underline{A}$ ist. Da $\underline{B}$ reflektiv ist, ist obiges Diagramm schon ein Pullback in $\underline{B}$ und somit g Kokern von (p,q) in $\underline{B}$. ♦

Mit der Bemerkung, daß wegen der unter 4. aufgelisteten Eigenschaften einer algebraischen Kategorie $(\underline{A},U)$ eine volle Unterkategorie $\underline{B}$ von $\underline{A}$ reflektiv in $\underline{A}$ ist (sogar epi-reflektiv), falls sie gegen Produkte und Unterobjekte abgeschlossen ist [He 1], folgt hieraus folgender Charakterisierungssatz:

SATZ 7: Ist $(\underline{A},U)$ eine algebraische Kategorie und $\underline{B}$ eine volle gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie von $\underline{A}$ mit der Einbettung $E: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$, so sind äquivalent:

- $(\underline{B},UE)$ ist algebraisch
- $\underline{B}$ ist reflektiv in $\underline{A}$
- $\underline{B}$ ist gegen Limiten abgeschlossen
- $\underline{B}$ ist gegen Produkte abgeschlossen.

Mit 3. lassen sich somit die algebraischen Kategorien mit Hilfe der varietalen wie folgt charakterisieren.

THEOREM 3: Ist $\underline{A}$ eine Kategorie und $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}$ ein Funktor, so sind äquivalent:

- $(\underline{A}, U)$ ist algebraisch
- Es gibt ein Tripel T in $\underline{S}$ und eine volle, gegen Produkte und gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie $\underline{B}$ von $\underline{S}^T$ mit der Einbettung E , und eine Äquivalenz $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{T} & \underline{B} \\ U \searrow & & \swarrow U_T E \\ & \underline{S} & \end{array}$$

kommutiert.

- Es gibt ein Tripel T in $\underline{S}$ und eine volle, reflektive gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie $\underline{B}$ von $\underline{S}^T$ und eine Äquivalenz $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{A} & \xrightarrow{T} & \underline{B} \\ U \searrow & & \swarrow U_T E \\ & \underline{S} & \end{array}$$

kommutiert.

Im Sinne der Birkhoffschen Theorie der universellen Algebren heißt dies insbesondere, daß die quasiprimitiven Klassen von Algebren gerade die vollen reflektiven, gegen Unterobjekte abgeschlossenen Unterkategorien von primitiven Klassen von Algebren sind.

4. Der Rang einer algebraischen Kategorie

Grob gesprochen ist die Frage nach dem Rang einer Kategorie von Algebren die Frage nach der oberen Grenze der Stellenzahlen der benötigten Operationen. Im Rahmen von Dualitätsbetrachtungen kommt dieser Frage besondere Bedeutung zu, da - zumindest in den genannten Beispielen - eine Kategorie nicht zugleich mit ihrer Dualen einen Rang hat.

Nach [Fe, Li 1] beschreibt man den Rang einer varietalen Kategorie $(\underline{A}, U)$ mit Hilfe des Adjungierten F von U . Es zeigt sich jedoch, daß auch eine Beschreibung ausschließlich durch $\underline{A}$ und U möglich ist [He 2], was eine Verallgemeinerung auf beliebige konkrete Kategorien erlaubt. Genauer gilt [He 2]:

SATZ 8: Ist $(\underline{A}, U)$ eine varietale Kategorie, A U -frei über $1 = \{\emptyset\}$ und k eine (unendliche) reguläre Kardinalzahl, so sind äquivalent:

- Für jeden $\underline{A}$ -Morphismus $f: A \longrightarrow \overset{I}{A}$ gibt es eine Teilmenge $K \subset I$ mit $|K| < k$, so daß f über die natürliche Injektion $\overset{K}{A} \longrightarrow \overset{I}{A}$ faktorisiert.
- Ist (l_i, L) ein k -filtrierender Kolimes in A , so ist $(U l_i, U L)$ ein Epi-Kopinsel.
- U bewahrt k -filtrierende Kolimites.

Zusatz: Ist $(\underline{A}, U)$ algebraisch, so sind zwar a. und b. noch äquivalent, b. und c. im allgemeinen aber nicht.

DEFINITION 6: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, und ist k eine reguläre Kardinalzahl, für die a. bzw. b. aus Satz 8 gilt, so heißt $(\underline{A}, U)$ k -är.

Die kleinste reguläre Kardinalzahl k , für die $(\underline{A}, U)$ k -är ist, heißt - falls sie existiert - der Rang von $(\underline{A}, U)$.

Im Zusammenhang mit der Darstellung einer algebraischen Kategorie als Unterkategorie einer varietalen ergibt sich

in Bezug auf den Rang:

SATZ 9: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und ist T das durch U und seinen Adjungierten erzeugte Tripel, so gilt:

Ist $(\underline{S}^T, U_T)$ k -är, so ist auch $(\underline{A}, U)$ k -är und umgekehrt.

Beweis:

Sei $\tilde{\phi}: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}^T$ der Vergleichsfunktor für U, γ sein Adjungierter. Dann bewahrt γ Koprodukte, und wegen $U_T \tilde{\phi} = U$ gilt für die repräsentierenden Objekte S von U_T und A von U : $\gamma S = A$. Damit folgt die Behauptung mit Satz 8 a. aus folgendem Lemma.

LEMMA: Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 9 gilt für jede Menge K : zu jedem $f \in \underline{A}(A, {}^K A)$ gibt es genau ein $g \in \underline{S}^T(S, {}^K S)$ mit $\gamma g = f$.

Beweis:

Es bezeichne F den Adjungierten von U , F_T den Adjungierten von U_T ; wegen $\langle U \rangle = \langle U_T \rangle$ gilt dann insbesondere:

$$U_T F_T = U F \text{ und } 1_S \xrightarrow{u} U F = 1_S \xrightarrow{u_T} U_T F_T.$$

Sei dann $f \in \underline{A}(A, {}^K A) = \underline{A}(F1, FK) \simeq \underline{S}(1, UFK) = \underline{S}^T(S, {}^K S)$,

dann gibt es genau ein $f' \in \underline{S}(1, UFK)$, so daß $f' = Uf \circ u$;

f' wiederum liefert $g \in \underline{S}^T(S, {}^K S)$ mit $U_T g \circ u_T = f'$ und die Zuordnung $f \longmapsto g$ ist bijektiv.

Wegen $U = U_T \tilde{\phi}$ und $\gamma \tilde{\phi} = 1_{\underline{A}}$ folgt dann aus

$$Uf \circ u = U_T \tilde{\phi} f \circ u_T = U_T g \circ u_T \text{ zunächst } \tilde{\phi} f = g \text{ und somit}$$

$$\gamma g = f. \quad \blacklozenge$$

ZUSATZ: Eine algebraische Kategorie $(\underline{A}, U)$ hat genau dann einen Rang, falls sie volle reflexive, gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie (im Sinne konkreter Kategorien) einer varietalen Kategorie $(\underline{B}, V)$ mit Rang ist.

Beweis:

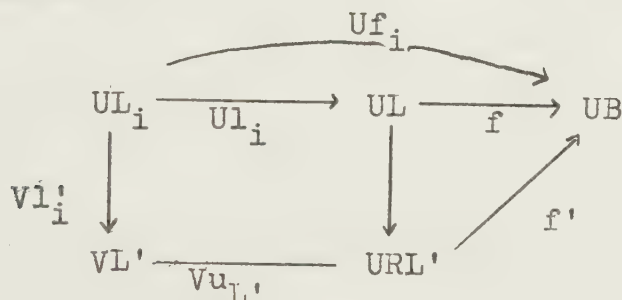
Sei also $(\underline{A}, U)$ volle reflexive gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie der varietalen Kategorie $(\underline{B}, V)$. Nach [He 1] ist $\underline{A}$ dann sogar regulär-epi-reflektiv in $\underline{B}$.

Es reicht nun zu zeigen ([He 2]):

Ist (l_i, L) ein k -filtrierender Kolimes in $\underline{A}$, $B \in \text{Ob } \underline{A}$ und $f \in S(UL, UB)$, so daß für jedes i ein $f_i \in \text{Mor } \underline{A}$ mit $Uf_i = fUl_i$ existiert, so gibt es ein $\bar{f} \in \underline{A}(L, B)$ mit $U\bar{f} = f$.

Sei also D ein k -filtrierendes Diagramm in $\underline{A}$, (l_i, L) sein Kolimes in $\underline{A}$ und (l'_i, L') sein Kolimes in $\underline{B}$. Nach Voraussetzung sind dann (l_i, L) und (u_L, l'_i, RL') äquivalent, wenn $u_L: L' \rightarrow RL'$ die Reflexion bezeichnet.

Seien nun f_i und f wie oben vorgegeben, so liegt folgendes Diagramm vor:



(f' sei vermöge der Isomorphie $UL \simeq URL'$ gefunden.)

Da alle Zellen kommutieren, gilt insbesondere

$$Uf_i = f'V(u_L, l'_i) = (f'Vu_L)Vl'_i = Vf_i$$

Nach Voraussetzung gibt es dann $\bar{f}': L' \rightarrow B$, mit $U\bar{f}' = f'Uu_L$.

Vermöge Adjunktion gibt es zu $\bar{f}'$ ein $\bar{f}: RL' \rightarrow B$, das mit dem entsprechenden Morphismus $L \rightarrow B$ identifiziert werde.

Dann ist $U\bar{f}Uu_L = U\bar{f}' = f'Uu_L$.

Nach der Bemerkung am Anfang ist Uu_L surjektiv, womit dann die Behauptung folgt. ♦

Weiterhin zeigt der Beweis zu Satz 9 sowie der Zusatz zu Satz 8 die Gültigkeit von

KOROLLAR: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und $\Phi_U: (\underline{A}, U) \longrightarrow (S^T, U_T)$ wie in Theorem 1, und ist (S^T, U_T) k -är, so überführt Φ_U k -filtrierende Kolimites in Epi-Kopinsel, im allgemeinen jedoch nicht wieder in k -filtrierende Kolimites.

Im folgenden sei noch, mehr der Vollständigkeit halber, eine Theorie, die kürzlich von Gabriel und Ulmer vorgestellt wurde $[G/U]$, angesprochen, die das Konzept der varietalen Kategorien verallgemeinert, allerdings nur, falls diese einen Rang haben.

5. Lokal präsentierbare Kategorien

DEFINITION 7: Sei k eine reguläre Kardinalzahl. Eine Kategorie $\underline{A}$ heißt l o k a l k - p r ä s e n t i e r b a r, falls gilt:

1. $\underline{A}$ ist kovollständig
2. $\underline{A}$ hat eine Generatormenge M mit
 - 2.1. $f \in \underline{A}(A, B)$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn für jedes $G \in M$ $\underline{S}(G, f)$ bijektiv ist.
 - 2.2. Für jedes $G \in M$ bewahrt $\underline{A}(G, -)$ k -filtrierende Kolimites.

$\underline{A}$ heißt l o k a l p r ä s e n t i e r b a r, falls es ein k gibt, so daß $\underline{A}$ lokal k -präsentierbar ist.

1. Ist $(\underline{A}, U)$ varietal, so ist $\underline{A}$ kovollständig, und das U -freie Objekt über $1 = \{\emptyset\}$ genügt der Bedingung 2.1..
 Hat $(\underline{A}, U)$ darüberhinaus einen Rang n , so ist $\underline{A}$ lokal k -präsentierbar für jede reguläre Kardinalzahl $k \geq n$.

2. Im Gegensatz hierzu sind algebraische Kategorien mit Rang im allgemeinen nicht lokal präsentierbar; in $[G/U]$ wird nämlich ein Beispiel einer vollen, reflexiven, gegen Unterobjekte abgeschlossene Unterkategorie der Kategorie der Halbgruppen angegeben, die nicht lokal präsentierbar ist, obwohl sie gemäß Satz 7 und Satz 9 Zusatz zu Satz 9 algebraisch ist und einen Rang hat (die Kategorie der Halbgruppen, versehen mit dem kanonischen Vergißfunktorkomplex, ist algebraisch mit dem Rang $\aleph_0$).

2'. Eine algebraische Kategorie $(\underline{A}, \underline{A}(G, -))$ ist genau dann lokal k -präsentierbar, bezüglich der Generatormenge $\{G\}$, wenn sie einen Rang $\leq k$ hat und der Vergißfunktorkomplex k -filtrierende Kolimites bewahrt.

2''. Ist andererseits $\underline{A}$ lokal k -präsentierbare Kategorie mit $M = \{G\}$, so ist $(\underline{A}, \underline{A}(G, -))$ algebraisch mit Rang $\leq k$, falls G regulär projektiv ist (II.Satz2).

3. Lokal präsentierbare Kategorien haben im allgemeinen nicht einmal einen repräsentierbaren Vergißfunktorkomplex (die Axiome sind also nicht so stark, einen Generator zu garantieren), wie folgendes Beispiel zeigt:

Für jede kleine Kategorie $\underline{U}$ ist die Funktorkategorie $K_{\underline{U}} = [\underline{U}^0, \underline{S}]$ lokal präsentierbar. Für $\underline{U} = \bullet \rightarrow \bullet$ hat aber $K_{\underline{U}}$ keinen Generator:

$F \in \text{Ob} K_{\underline{U}}$ ist ein Tripel (F, f, F') mit $F, F' \in \text{Ob} \underline{S}$, $f \in \underline{S}(F, F')$; $n \in K_{\underline{U}}(F, G)$ ist ein Paar (n, n') mit $n \in \underline{S}(F, G)$, $n' \in \underline{S}(F', G')$, so daß:

$$\begin{array}{ccccc} F: & = & F & \xrightarrow{f} & F' \\ n \downarrow & & n \downarrow & & \downarrow n' \\ G: & = & G & \longrightarrow & G' \end{array}$$

a. Gibt es in $K_{\underline{U}}$ einen Generator, so ist er von der Form $\emptyset \rightarrow F$, da es von ihm aus Morphismen in $K_{\underline{U}}$ -Objekte dieser Form geben muß.

b. Kein Objekt der Form $\emptyset \rightarrow F$ ist Generator in $\underline{K_U}$, wie man mit Hilfe der beiden Morphismen $(\underline{1}, id), (\underline{2}, id): (\{1,2\} \rightarrow \{1\}) \rightarrow (\{1,2\} \rightarrow \{1\})$ sieht ($\underline{1}$ und $\underline{2}$ bezeichnen die entsprechenden konstanten Abbildungen)

4. Trotz dieser "Größe" der Klasse der lokal präsentierbaren Kategorien ist diese zu klein, um eine Dualitätstheorie zu gestatten, da in ihr nur "triviale" Dualitäten möglich sind, denn falls mit einer lokal präsentierbaren Kategorie $\underline{A}$ auch ihre Duale lokal präsentierbar ist, so ist $\underline{A}$ äquivalent zu einer inf- und sup-vollständigen geordneten Menge $[G/U]$. Der entsprechende Sachverhalt für algebraische Kategorien wird in III. 1. aufgezeigt.

6. Zusammenfassung

Der Übersichtlichkeit halber seien die bisher behandelten Klassen von Kategorien noch einmal samt ihrer Beziehungen zueinander zusammengestellt.

Es bezeichne

RK die Klasse der konkreten Kategorien mit repräsentierbarem Vergißfunktork

Beispiel:

Kategorie der topologischen Räume

AK die Klasse der algebraischen Kategorien

Beispiel:

nulldimensionale kompakte T_2 -Räume.

AKr die Klasse der algebraischen Kategorien mit Rang

Beispiel:

die volle Unterkategorie der Kategorie der abelschen Gruppen, deren Objekte solche Gruppen sind, die in ein Produkt endlicher abelscher Gruppen eingebettet werden können [He 2].

AKrs die Klasse der algebraischen Kategorien, für die es k gibt, so daß der Vergißfunktork- k -filtrierende Kolimites bewahrt

Beispiel:

Kategorie der torsionsfreien abelschen Gruppen

VK die Klasse der varietalen Kategorien

Beispiel:

kompakte T_2 -Räume

VKr die Klasse der varietalen Kategorien mit Rang

Beispiel:

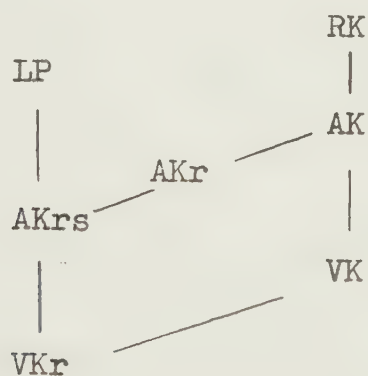
Gruppen, Moduln, Boolesche Algebren

LK die Klasse der lokal präsentierbaren Kategorien

Beispiel:

Kategorie der mengenwertigen Garben

Aufgrund des bisher Gezeigten ergeben sich die durch folgende Graphik beschriebenen "Inklusionen":



KAPITEL II: EINE DUALITÄTSTHEORIE

Die "größte" der in Kapitel I dargestellten Klassen von Kategorien, die eine sinnvolle Dualitätstheorie zuläßt, ist die Klasse der algebraischen Kategorien $AK - RK$ ist "zu groß", VK ist "zu klein", LP läßt nur "triviale" Dualitäten zu. Daß sich nun für eine Klasse algebraischer Kategorien tatsächlich eine Dualitätstheorie entwickeln läßt, beruht auf dem Tripelbarkeitstheorem. Aus den Ausführungen in I.1. wird dabei klar, wie dieser Satz einzusetzen ist.

1. Der Dualitätssatz von Linton

Nach den Ausführungen in I.1. ist klar, daß - will man vermöge des Tripelbarkeitstheorems eine Dualität erhalten -, man von einem Funktor $\underline{A}(-, I): \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{S}$ ausgehen muß, wobei I ein Kogenerator ist, der injektiv bezüglich solcher $\underline{A}$ -Morphismen f ist, für die $\underline{A}(f, I)$ surjektiv ist, - also mindestens bezüglich Kernen, da $\underline{A}(-, I)$ reguläre $\underline{A}^0$ -Morphismen bewahren muß, soll das Tripelbarkeitstheorem auf diesen Funktor anwendbar sein.

Dementsprechend geht Linton aus von einer varietalen Kategorie $(\underline{A}, U)$ und einem Kogenerator I von $\underline{A}$, der injektiv bezüglich Kernen ist, setzt aber, um zu gewährleisten, daß $\underline{A}(-, I)$ auch reguläre Epimorphismen reflektiert, zunächst voraus, daß in $\underline{A}$ jeder Monomorphismus Kern ist; (dann impliziert - $\underline{A}(-, I)$ ist treu - die Surjektivität von $\underline{A}(f, I)$ die Monomorphie von f in $\underline{A}$, und die Zusatzvoraussetzung zeigt, daß f $\underline{A}^0$ -Kokern ist).

Im Hinblick auf die Anwendungen, das heißt zum Nachweis dieser Zusatzbedingung in konkreten Fällen, beweist Linton dabei eine schwächere Form des folgenden

SATZ 1: In einer Kategorie $\underline{A}$ mit den Eigenschaften¹⁾

- a. $\underline{A}$ ist vollständig
- b. $\underline{A}$ ist lokal-klein
- c. In $\underline{A}$ ist jeder extreme Epimorphismus regulär
- d. $\underline{A}$ hat einen Kogenerator I , der injektiv bezüglich Kernen ist

sind äquivalent:

- i. jeder Monomorphismus ist Kern
- ii. jeder Epimorphismus ist Kokern
- iii. $\underline{A}$ ist balanciert.

Beweis:

i. $\Rightarrow$ iii. und ii. $\Rightarrow$ iii. sind trivial.

iii. $\Rightarrow$ ii. folgt unter Benutzung der (regulären epi, mono)-Faktorisierung eines Epimorphismus, die wegen a., b., c. existiert.

iii. $\Rightarrow$ i. folgt unter Benutzung der Isbell'schen Dominion-Faktorisierung eines Monomorphismus, die wegen a. und b. existiert, mit d. (siehe auch [Li 3.]) ♦

Linton zeigt dann im wesentlichen, daß sich für eine varietale Kategorie $(\underline{A}, U)$, falls $\underline{A}$ einen injektiven Kogenerator I hat und balanciert ist, eine Äquivalenz ϕ von $(\underline{A}^0, \underline{A}(-, I))$ (im Sinne konkreter Kategorien) zu einer bestimmten Unterkategorie von $\underline{S}^T$ (T sei das durch U und seinen Adjungierten F erzeugte Tripel) konstruieren läßt, die in Termen von $\underline{S}^T$ und F beschreibbar ist, und daß die erneute Anwendung des Verfahrens auf diese Unterkategorie von $\underline{S}^T$ gerade das Äquivalenzinverse zu ϕ liefert.

Das Ziel des folgenden Paragraphen ist nun, die Lintonsche Konstruktion auf die Klasse der algebraischen Kategorien

1) Für jede algebraische Kategorie $(\underline{A}, U)$ hat nach I.3. $\underline{A}$ die Eigenschaften a., b., c..

auszuweiten. Dabei wird eine Abschwächung von Lintons Voraussetzung seiner Konstruktion insbesondere soweit möglich, daß eine Charakterisierung einer maximalen Klasse algebraischer Kategorien, die gegen dies Konstruktionsverfahren abgeschlossen ist, gegeben werden kann.

2. Eine Dualitätstheorie für eine Klasse algebraischer Kategorien

Unter dem Aspekt der Minimalvoraussetzungen für die skizzierte Konstruktion geht es nach dem unter 1. Gesagten zunächst darum, für eine vollständige und kovollständige Kategorie $\underline{A}$ diejenigen Objekte $A \in \text{Ob}\underline{A}$ zu charakterisieren, für die $\underline{A}(A, -)$ algebraisch ist. Dies geschieht in:

SATZ 2: Ist $\underline{A}$ eine kovollständige Kategorie und $A \in \text{Ob}\underline{A}$, so sind äquivalent:

1. $(\underline{A}, \underline{A}(A, -))$ ist eine algebraische Kategorie
2. $V = \underline{A}(A, -)$ ist ein algebraischer Funktor
3. A ist ein regulär-projektiver regulärer Generator
4. A ist ein regulär-projektiver echter Generator.

Beweis:

1. $\iff$ 2.: Ist die Aussage des Korollars zu I. Satz 5.

Zunächst ist klar, daß A genau dann regulär projektiv ist, wenn $\underline{A}(A, -)$ reguläre Epimorphismen bewahrt.

2. $\implies$ 3.: Sei $B \in \text{Ob}\underline{A}$ und (v, C) V -frei über VB ; dann gibt es $g: C \longrightarrow B$ mit $1_{VB} = (Vg) \circ v$. Hieraus folgt sofort, daß B regulärer Quotient von ${}^{VB}A$ ist.

3. $\implies$ 4.: Sei $f: B \longrightarrow B'$ und Vf bijektiv. Seien weiter $\underline{f}$ der durch f induzierte Isomorphismus $\underline{A}(A, B)_A \xrightarrow{\cong} \underline{A}(A, B')_A$ und $e, (e')$ die kanonischen regulären Epimorphismen auf $B (B')$. Dann ist $fe = e' \underline{f}$ regulär und somit auch (e ist regulär) f . Da V Monomorphismen reflektiert, ist f sogar Isomorphismus.

4. $\implies$ 2.: Es ist nur zu zeigen, daß V reguläre Epimorphismen reflektiert. Sei also $p: B \longrightarrow C$ ein Morphismus und Vp

surjektiv. Ist $I = \{(f, g) \mid f, g: A \longrightarrow B \text{ und } pf = pg\}$,
so erhält man Morphismen $i_1, i_2: {}^I A \longrightarrow B$ mit $i_1^k(f, g) = f$ und
 $i_2^k(f, g) = g$ für jedes $(f, g) \in I$ (k sei die i -te Injektion).

Sei $q: B \longrightarrow C'$ der Kokern von i_1, i_2 und $r: C' \longrightarrow B$ der
eindeutig bestimmte Morphismus mit $p = rq$ (nach Definition
ist $qi_1 = qi_2$). Da Vq surjektiv ist, ist Vr injektiv, wie
unmittelbar aus der Definition von ${}^I A$ folgt. Andererseits
ist wegen $p = rq$ Vr auch surjektiv, da nach Voraussetzung
 Vp surjektiv ist. Da V Isomorphismen reflektiert, ist
somit r ein Isomorphismus. Also ist p ein regulärer Epi-
morphismus. ♦

Im Hinblick auf das unter 1. Gesagte sei noch erwähnt:

KOROLLAR 1: Sei $\underline{A}$ eine kovollständige
Kategorie; ferner sei in $\underline{A}$ jeder extreme Epimorphismus
regulär. Ist $A \in \text{Ob } \underline{A}$, so sind äquivalent:

1. $(\underline{A}, \underline{A}(A, -))$ ist algebraisch und $\underline{A}(A, -)$ bewahrt Epimor-
phismen
2. $\underline{A}$ ist balanciert und A ist projektiver Generator in $\underline{A}$.

KOROLLAR 2: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und
 $U = \underline{A}(A, -)$, so sind äquivalent:

1. $\underline{A}$ ist balanciert
2. U bewahrt Epimorphismen
3. A ist projektiv

Mit diesen Ergebnissen läßt sich nun die Klasse der
algebraischen Kategorien $(\underline{A}, U)$ charakterisieren, für
die sich $\underline{A}^0$ wieder als algebraische Kategorie auffassen
läßt. Durch Dualisieren der Ergebnisse erhält man nämlich
sofort:

SATZ 3: Sei $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, so
sind äquivalent:

1. Es gibt einen regulär-injektiven regulären Kogenerator I
in $\underline{A}$

2. Es gibt einen Funktor $V: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{S}$, so daß $(\underline{A}^0, V)$ algebraisch ist.

Beweis:

Man setze $V = \underline{A}(-, I)$ bzw. $I = G1$, wenn G der Adjungierte von V ist. ♦

SATZ 4: Sei $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, so sind äquivalent:

1. Es gibt einen injektiven Kogenerator in $\underline{A}$, und U bewahrt Epimorphismen
2. Es gibt einen injektiven Kogenerator in $\underline{A}$ und $\underline{A}$ ist balanciert
3. Es gibt einen Funktor $V: \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{S}$, der Epimorphismen bewahrt, so daß $(\underline{A}^0, V)$ algebraisch ist.

Problem: Ist ein injektiver regulärer Kogenerator in einer algebraischen Kategorie schon ein injektiver Kogenerator?

Entsprechend Satz 3 werden im folgenden nur solche algebraische Kategorien $(\underline{A}, U)$ betrachtet, für die $\underline{A}$ einen regulär injektiven, regulären Kogenerator I (r.i.r.K.) besitzt.

Für solche Kategorien soll $(\underline{A}^0, \underline{A}(-, I))$ als Unterkategorie von $\underline{S}^T$ ($T = \langle U \rangle$) realisiert werden.

Dazu sei $M := \underline{A}(-, I): \underline{A}^0 \longrightarrow \underline{S}$. Mit den Bezeichnungen von I.3. gilt dann

SATZ 5: Sei $(\underline{A}, U)$ algebraisch, I ein r.i.r.K. in $\underline{A}$ und $T = \langle M \rangle$. Dann ist

$\Phi'_M: (\underline{A}^0, \underline{A}(-, I)) \longrightarrow (\underline{\Phi}_M \underline{A}^0, U_T E)$ eine Äquivalenz algebraischer Kategorien.

Darüberhinaus ist, bezeichnet F den Adjungierten zu U , $\underline{\Phi}_M F1$ ein r.i.r.K. in $\underline{\Phi}_M \underline{A}^0$.

Beweis:

I.3. sowie Satz 2 und Satz 3. ♦

Die algebraische Kategorie $(\underline{\Phi}_M \underline{A}^0, U_T E)$ werde dann

(im Vorgriff auf die folgenden Ergebnisse) mit $(\underline{A}, \underline{U})_I^0$ bezeichnet.

Es bleibt zu zeigen, daß dieses Konstruktionsverfahren - das heißt Auswahl eines r.i.r.K. I , bilden des entsprechenden Vergißfunktors M - angewandt auf $(\underline{A}, \underline{U})_I^0 = (\underline{\Phi}_M \underline{A}^0, U_T E)$ wieder $(\underline{A}, \underline{U})$ und ein Äquivalenzinverses zu $\underline{\Phi}'_M$ liefert.

Sei also $I' := \underline{\Phi}_M F1$ (diese Wahl ist kanonisch, zum Beispiel wegen I. Satz 1)

$M' = \underline{\Phi}_M \underline{A}^0(-, I') : (\underline{\Phi}_M \underline{A}^0)^0 \longrightarrow \underline{S}, T' = \langle M' \rangle.$

Nach Satz 5 erhält man wieder eine Äquivalenz algebraischer Kategorien

$$\underline{\Phi}'_M : ((\underline{\Phi}_M \underline{A}^0)^0, \underline{\Phi}_M \underline{A}^0(-, I')) \longrightarrow (\underline{\Phi}_M, (\underline{\Phi}_M \underline{A}^0)^0, U_T, E') = ((\underline{A}, \underline{U})_I^0)_I^0,$$

Bemerkung: Es folgt aus I.1. und ist auch unmittelbar direkt einsichtig, daß I und I' dieselbe unterliegende Menge haben.

Mit I Satz 3 folgt aufgrund dieser Konstruktion:

THEOREM 1: Ist $(\underline{A}, \underline{U})$ eine algebraische Kategorie mit einem r.i.r.K. I , so ist $\underline{\Phi}'_M \circ \underline{\Phi}_M^0 : (\underline{A}, \underline{U}) \longrightarrow ((\underline{A}, \underline{U})_I^0)_I^0$, eine Äquivalenz algebraischer Kategorien. Modulo dieser Äquivalenz ist dann $\underline{\Phi}_M^0$ äquivalenzinvers zu $\underline{\Phi}'_M$.

Bemerkung: Man kann auch unmittelbar nachrechnen, daß $\underline{S}^{\langle U \rangle} = \underline{S}^{T'}$. Obige Äquivalenz ist dann gerade die Identifizierung von $(\underline{A}, \underline{U})$ mit der entsprechenden Unterkategorie von $\underline{S}^{\langle U \rangle}$ gemäß I. Theorem 3.

Zur Handhabung der Kategorie $(\underline{A}, \underline{U})_I^0$ dient die folgende Charakterisierung

SATZ 6: Ist $(\underline{A}, \underline{U})$ eine algebraische Kategorie mit einem r.i.r.K. I , so ist $\underline{\Phi}_M \underline{A}^0$ die volle Unterkategorie von $\underline{S}^{\langle M \rangle}$ der Objekte, die von $\underline{\Phi}_M F1$ (F sei der Adjungierte von U) kogeneriert werden; darüber hinaus werden die Objekte aus $\underline{\Phi}_M \underline{A}^0$ sogar von $\underline{\Phi}_M F1$ regulär kogeneriert.

Beweis:

1. Wird $Y \in \text{Ob } \underline{S}^{<M>}$ von $\bar{\Phi}_M F1$ kogeneriert, so ist Y Unterobjekt von $(\bar{\Phi}_M F1)^n = \bar{\Phi}_M (F1)^n$, mit einer geeigneten Menge n , da $\bar{\Phi}_M$ als Koadjungierter Produkte bewahrt, da $\bar{\Phi}_M A^\circ$ gegen Bildung von Unterobjekten abgeschlossen ist, folgt: $Y \in \text{Ob } \bar{\Phi}_M A^\circ$.

2. Ist $Y \in \text{Ob } \bar{\Phi}_M A^\circ$, so ist $Y \hookrightarrow \bar{\Phi}_M X$ für ein $X \in \text{Ob } \underline{A}$. Da $F1$ regulärer Generator für $\underline{A}$ ist, gibt es einen regulären Epimorphismus $q: \text{UX } F1 \longrightarrow X$.

Dann ist $\bar{\Phi}_M q: \bar{\Phi}_M X \longrightarrow \bar{\Phi}_M (\text{UX } F1) = \bar{\Phi}_M F1 \text{UX} = \bar{\Phi}_M F1 \bar{\Phi}_M A^\circ (\bar{\Phi}_M X, \bar{\Phi}_M F1)$ ein Kern. Also kogeneriert $\bar{\Phi}_M F1$ Y regulär. ♦

Die in I.1. angestellten Überlegungen zur Eindeutigkeit und Form von Dualitäten übertragen sich zwanglos; insbesondere seien hervorgehoben:

SATZ 7: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie, und sind I, J r.i.r.K. in $\underline{A}$, so sind äquivalent:

a. $I \simeq J$

b. $(\underline{A}, U)_I^\circ \simeq (\underline{A}, U)_J^\circ$

SATZ 8: Sind $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{B}, V)$ algebraische Kategorien, und gibt es Funktoren $S: \underline{A}^\circ \longrightarrow \underline{B}$, $T: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^\circ$ mit $TS \simeq 1_{\underline{A}^\circ}$, $ST \simeq 1_{\underline{B}}$, dann gibt es einen r.i.r.K. I von $\underline{A}$ mit $(\underline{B}, V) \simeq (\underline{A}, U)_I^\circ$.

Dies besagt gerade, daß das angegebene Verfahren zur Gewinnung von Dualitäten eindeutig ist, daß man also jede Dualität zwischen algebraischen Kategorien so erhalten kann.

Weiterhin ergibt sich unmittelbar noch ein Kriterium dafür, daß eine konkrete Kategorie algebraisch ist:

SATZ 9: Seien $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{B}, V)$ konkrete Kategorien, sei $(\underline{A}, U)$ algebraisch und bewahre $V = \underline{B}(B_1, -)$ reguläre Epimorphismen; $S: \underline{A}^\circ \longrightarrow \underline{B}$, $T: \underline{B} \longrightarrow \underline{A}^\circ$ sei eine Dualität.

Mit $I := TB_1$ ist dann $(\underline{B}, V) \simeq (\underline{A}, U)_I^\circ$; insbesondere ist auch $(\underline{B}, V)$ algebraisch.

Beispiel: Sei $\underline{A}$ die Kategorie der kommutativen C^* -Algebren mit Identität, $U: \underline{A} \longrightarrow \underline{S}$ der folgende Vergißfunktor:

$UA = \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ für $A \in \text{Ob } \underline{A}$, $Uf = f|_{UA}$ für $f \in \text{Mor } \underline{A}$.

Dann ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische (sogar eine varietale) Kategorie, und es gibt eine Äquivalenz zwischen $\underline{A}^0$ und der Kategorie der kompakten T_2 -Räume $\underline{K}$ [Ne]. Also ist $(\underline{K}, \underline{K}(\{\emptyset\}, -))$ eine algebraische Kategorie.

KAPITEL III: ANWENDUNGEN

Eine Dualitätstheorie ermöglicht in kanonischer Weise Anwendungen in zweierlei Richtung: Rückschlüsse relativ allgemeiner Art allein aus der Existenz einer Dualität heraus - hierbei wird es sich um Eigenschaften der betrachteten Kategorie handeln--; systematische Suche nach Dualitäten, aus deren konkreter Kenntnis dann üblicherweise auf die Struktur der Objekte der betrachteten Kategorie geschlossen wird.

1. Eigenschaften algebraischer Kategorien mit einer Dualen

Allein aus der Kenntnis, daß die Duale einer algebraischen Kategorie wieder algebraisch ist, folgt:

SATZ 1: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und hat $\underline{A}$ einen r.i.r.K. I , so gilt:

- a. $\underline{A}$ ist lokal kokleins
- b. In $\underline{A}$ ist jeder extreme Monomorphismus Kern
- c. $\underline{A}$ hat (epi, Kern)-Faktorisierungen
- d. In $\underline{A}$ ist jedes Kompositum von Kernen wieder ein Kern und jedes Kompositum von Kokernen wieder ein Kokern

Beweis:

Klar nach I.3. ♦

Häufig tauchen, wie schon zu Beginn angedeutet, bei Dualitätsbetrachtungen abelsche Kategorien auf. Über das abelsch-Sein algebraischer Kategorien gilt in diesem Zusammenhang:

SATZ 2: Ist $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie und ebenso $(\underline{A}^0, V)$, so ist $\underline{A}$ abelsch genau dann, wenn $\underline{A}$ balanciert ist und $|UF\emptyset| = 1$.

Beweis:

Nach Korollar 2 zu II.Satz2 steht nur die Existenz eines Nullobjekts infrage. Da $F\emptyset$ initial ist und U insbesondere terminale Objekte bewahrt und reflektiert, folgt die

Behauptung aus der Tatsache, daß die terminalen Objekte in $\underline{S}$ gerade die einelementigen Mengen sind. ♦

Bemerkung: Im allgemeinen ist unter den Voraussetzungen von Satz 2 die Bedingung $|UF\emptyset| = 1$ nicht erfüllt, wie das Beispiel der Booleschen Algebren zeigt; hier ist $UF\emptyset = 2$.

Auch die ebenfalls schon angesprochene Frage des Rangs bei Dualitäten algebraischer Kategorien läßt sich nun beantworten:

SATZ 3: Sei $(\underline{A}, U)$ eine algebraische Kategorie mit Rang r ; sei ferner auch $(\underline{A}^0, U')$ algebraisch mit Rang s . Dann hat jedes Objekt von $\underline{A}$ genau einen Endomorphismus.

Bevor Satz 3 bewiesen wird, soll schon die Folgerung, um deretwillen dieser Satz formuliert wird, gezogen werden:

THEOREM 2: Sind $(\underline{A}, U)$ und $(\underline{A}^0, U')$ algebraische Kategorien mit Rang, so gilt $\underline{A} \simeq 1$ oder $\underline{A} \simeq 2$.

Beweis:

Bezeichnet F den Adjungierten zu U , so folgt aus Satz 3, daß für jede Menge n $|UFn| = 1$ gilt; Da U Isomorphismen reflektiert, sind - falls $UF\emptyset \neq \emptyset$ - alle U -freien Objekte isomorph, und damit sogar alle $\underline{A}$ -Objekte (da jedes regulärer Quotient eines freien ist).

Ist $UF\emptyset = \emptyset$, so gibt es neben der Klasse K isomorpher Objekte mit nicht-leerer Trägermenge (s. o.) eine weitere Klasse K' isomorpher Objekte, nämlich der mit leerer Trägermenge.

Man sieht sofort, daß für $X \in K$ und $X' \in K'$ gilt:

$\underline{A}(X', X) = \{f\}$, $\underline{A}(X, X') = \emptyset$. Also ist $\underline{A} \simeq 2$. ♦

Nun zum Beweis von Satz 3:

Vorbemerkung: Bewahrt in einer Kategorie $\underline{A}$ der Funktor $\underline{A}(n, -)$ k -filtrierende Kolimiten und ist $X \in \text{Ob } \underline{A}$ Kokern eines Paares $\underline{m} \underline{A} \xrightarrow[r]{s} \underline{n} \underline{A}$, so bewahrt $\underline{A}(X, -)$ k' -filtrierende Kolimiten, falls $k' \geq m, n, k$ [z.B. G/U].

Ist $(\underline{A}, U)$ eine varietale Kategorie mit Rang, $U = \underline{A}(A, -)$ und $X \in \text{Ob } \underline{A}$, so gibt es zunächst einen regulären Epimorphismus $r: {}^n \underline{A} \rightarrow X$, also auch Morphismen x, y , so daß

${}^n \underline{A} \xrightarrow{r} X = \text{Kok}(Y \xrightarrow{x} {}^n \underline{A} \xrightarrow{y} X)$; ebenso gibt es einen regulären Epimorphismus ${}^m \underline{A} \xrightarrow{s} Y$. Da dann ${}^n \underline{A} \xrightarrow{r} X = \text{Kok}({}^m \underline{A} \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{x} {}^n \underline{A} \xrightarrow{y} X)$, gibt es nach vorstehender Bemerkung eine reguläre Kardinalzahl k_X , so daß $\underline{A}(X, -)$ k -filtrierende Kolimiten bewahrt, falls nur $k > k_X$.

Seien nun $(\underline{B}, V)$ und $(\underline{B}', V')$ die $(\underline{A}, U)$ bzw. $(\underline{A}^0, U')$ kanonisch umfassenden varietalen Kategorien mit Rang, $A \in \text{Ob } \underline{A}$ und $f \in \underline{A}(A, A)$. Sei k eine reguläre Kardinalzahl, r, s , so daß $\underline{A}(A, -)$ k -filtrierende $\underline{B}$ -Kolimiten bewahrt und sei I eine Menge mit $|I| = k$ und $i_0 \in I$.

Dann ist $\underline{D} = \{n \mid n \subset I, i_0 \in n, |n| < k\}$ k -filtrierend.

Sei $P: \underline{D} \rightarrow \underline{A}$ folgendes Diagramm:

$$Pn = A^n, \quad p_i^m: P(n \rightarrow m) = 1_A p_i^n, \text{ falls } i \in n$$

$$p_i^m: P(n \rightarrow m) = f \cdot p_{i_0}^n, \text{ falls } i \notin n$$

(dabei sei $p_i^m: A^m \rightarrow A$ die i -te Projektion, $i \in m$)

Für $n \in \underline{D}$ sei $g_n: A^n \rightarrow A^I$ definiert durch

$$p_i^I g_n = 1_A p_i^n, \text{ falls } i \in n$$

$$p_i^I g_n = f \cdot p_{i_0}^n, \text{ falls } i \notin n$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß (g_n) eine natürliche Transformation von P auf den konstanten Funktor A^I (daß also A^I eine obere Schranke für P) ist. (g_n) induziert also einen eindeutig bestimmten $\underline{B}$ -Morphismus $g: \varinjlim_n A^n \rightarrow A^I$

und einen eindeutig bestimmten $\underline{A}$ -Morphismus $g': \varinjlim_n A^n \rightarrow A^I$ ($\varinjlim$ bezeichne den $\underline{A}$ -Kolimes).

Wir wollen g' als Isomorphismus nachweisen; dazu reicht es, zu zeigen ($\varinjlim A^n$ ist die Reflexion von $\varinjlim A^n$), daß g ein Isomorphismus ist.

Bezeichnet $p_n: A^I \rightarrow A^n$ die kanonische Projektion, so gilt $p_n g_n = 1_{A^n}$; also ist $g_n = \text{Ker}(1_{A^I}, g_n p_n)$. Da in $\underline{B}$ als

variationaler Kategorie mit Rang $\leq k$ k -filtrierende Kolimiten mit Kernen vertauschbar sind [z.B. Sch 1], ist g ein regulärer Monomorphismus. Insbesondere ist $\varinjlim A^n \in \text{Ob } \mathcal{A}$. Andererseits ist g (bis auf den Isomorphismus $\varinjlim A^n \simeq A^I$) gerade der Limes der $p_n g$, die sämtlich Epimorphismen sind (es ist sogar $p_n \circ g \circ l_n = 1_A$, wenn $l_n: A^n \rightarrow \varinjlim A^n$ die kanonischen Morphismen sind).

In $\mathcal{A}^0$ ist also g filtrierender Kolimes von Monomorphismen. Ist $\bar{g}$ der entsprechende Kolimes in $\mathcal{B}'$, so gilt $\bar{g} = gr$, wenn r den Reflexionsmorphismus des $\mathcal{B}'$ -Kolimes der A^n auf den $\mathcal{A}^0$ -Kolimes der A^n bezeichnet. Da $\bar{g}$ dann wieder monomorph ist [z.B. Sch 1], r aber regulär epimorph ist, ist mit $\bar{g}$ auch g monomorph in $\mathcal{A}^0$. Wir erhalten also:

$$A^I = \varinjlim A^n = \varinjlim' A^n.$$

Da nach Voraussetzung $\underline{A}(A, -) = V|_A \varinjlim$'s bewahrt, folgt hieraus $\varinjlim \underline{A}(A, A^n) = \underline{A}(A, \varinjlim A^n) = \underline{A}(A, A^I)$.

Dann faktorisiert aber die Diagonalabbildung $\Delta: A \rightarrow A^I$ über ein g_n , woraus nach Definition der g_n sofort $f = 1_A$ folgt. ♦

2. Beispiele

Die hier entwickelte Dualitätstheorie liefert auch die Möglichkeit, systematisch nach Dualitäten für algebraische Kategorien zu suchen. Dabei wird im konkreten Fall das Bestimmen der Kategorie $(\underline{A}, \underline{U})_I^0$ so erfolgen, daß man, ausgehend von einem r.i.r.K. I und dem zugehörigen Funktor M , die von $\Phi_M \mathbb{F}1$ kogenerierte Unterkategorie von $\underline{S}^{(M)}$ berechnet.

1. Geht man in diesem Sinne in der Kategorie der Booleschen Algebren von der zweielementigen Algebra als injektivem Kogenerator aus, so erhält man die Stone-Dualität.

2. Ebenso liefert diese Dualitätstheorie die Pontrjagin-Dualität für kompakte abelsche Gruppen. Hier wird $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als injektiver Kogenerator zugrunde gelegt.

3. Mit Hilfe von 2. läßt sich zu Modulkategorien eine algebraische Duale konstruieren:

Ist R ein Ring mit 1 (der Einfachheit wegen sei R kommutativ, doch ist diese Voraussetzung im Folgenden nicht wesentlich), so ist die Kategorie der R -Moduln gerade die Kategorie $(\underline{R}, \underline{Ab})$ der additiven Funktoren von $\underline{R}$ nach $\underline{Ab}$, wenn $\underline{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen bezeichnet und $\underline{R}$ die additive Kategorie mit $\text{Ob } \underline{R} = \{R\}$ und $\text{Mor } \underline{R} = \{f_a \mid f_a(x) = ax, x \in R, a \in R\}$.

Bezeichnet dann $\underline{KAb}$ die Kategorie der kompakten abelschen Gruppen, so ist mit Hilfe der Pontrjagin-Dualität

$$(\underline{R}, \underline{Ab})^0 = (\underline{R}^0, \underline{Ab}^0) = (\underline{R}, \underline{Ab}^0) = (\underline{R}, \underline{KAb}).$$

$(\underline{R}, \underline{KAb})$ ist die Kategorie, deren Objekte kompakte abelsche Gruppen sind, auf denen R stetig operiert, und deren Morphismen stetige R -Modul-Homomorphismen sind.

Nach Satz 9 ist dann mit den kanonischen Vergißfunktoren U, V $((\underline{R}, \underline{Ab}), V) \simeq ((\underline{R}, \underline{KAb}), U)_I^0$ mit einem injektiven Kogenerator I von $(\underline{R}, \underline{KAb})$. Man rechnet leicht nach, daß $UI = \underline{Ab}(R, R/\mathbb{Z})$.

Bei K -Vektorräumen ist diese Dualität im allgemeinen verschieden von der, die man erhält, wenn man von dem injektiven Kogenerator K ausgeht (II.Satz 77).

4. Die Dualität zwischen der Kategorie $\underline{K}$ der kompakten T_2 -Räume und der Kategorie der kommutativen C -Algebren mit Identität erhält man, indem man in $\underline{K}$ mit dem injektiven Kogenerator $J = \{z \mid z \in \mathbb{C}, z \leq 1\}$ startet. (J versehen mit der "üblichen" Topologie).

Startet man mit dem Einheitsintervall in $\underline{K}$, erhält man eine weitere Dualität.

5. In $\underline{S}$ ist $1,2$ ein injektiver Kogenerator. Das durch $M_{1,2}$ und seinen Adjungierten erzeugte Tripel ist gerade die doppelte Potenzmengenbildung. Dies ist aber auch das Tripel der Kategorie $\underline{B}$ der vollständigen atomaren Booleschen Algebren und vollständigen Homomorphismen.

Der resultierende Dualitätsfunktorkomplex ist der Potenzmengenfunktorkomplex, woran man sieht, daß sich ganz $\underline{B}$ als Duale zu $\underline{S}$ ergibt.

6. Die algebraische Kategorie $\underline{S}_0$ der punktierten Mengen hat eine algebraische Duale, da $(\{1,2\}, 1)$ injektiver Kogenerator in $\underline{S}_0$ ist.

7. Die algebraische Kategorie der Gruppen $\underline{G}$ hat keine algebraische Duale, da sie balanciert und konormal, aber nicht normal ist (II. Satz 1); insbesondere hat $\underline{G}$ keinen injektiven Kogenerator.

Die Morita-Dualitäten und die Dualität der lokallompakten abelschen Gruppen kann die hier entwickelte Dualitätstheorie nicht liefern, da die in diesen Fällen beteiligten Kategorien nicht algebraisch sind.

LITERATURVERZEICHNIS

- [E/M] S. Eilenberg und J. C. Moore, Adjoint functors and triples, Ill. J. Math. 9 (1965), 381-398
- [Fe] W. Felscher, Kennzeichnung von primitiven und quasi-primitiven Kategorien von Algebren, Arch. Math. 19 (1968), 390-397
- [G/U] P. Gabriel und F. Ulmer, Lokal präsentierbare Kategorien, Lecture Notes 221, Springer 1971
- [He1] H. Herrlich, Topologische Reflexionen und Coreflexionen, Lecture Notes 78, Springer 1968
- [He2] H. Herrlich, A characterization of k-ary algebraic categories, Manuscripta Math. 4 (1971), 277-284
- [Is] J. R. Isbell, Epimorphisms and dominions, Proc. Conf. Categ. Alg. (La Jolla, 1965), Springer 1966, 232-246
- [Li1] F. E. J. Linton, Some aspects of equational categories, Proc. Conf. Categ. Alg. (La Jolla 1965), Springer 1966, 84-94
- [Li2] F. E. J. Linton, Applied functorial semantics II, in Lecture Notes 80, Springer 1969, 53-74
- [Li3] F. E. J. Linton, Applied functorial semantics I, Annali di Matematica 1970, 1-13
- [Mi] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press, New York, 1965
- [Ne] J. M. Negrepontis, Applications of the theory of categories to analysis, Thesis, Mc Gill Univ. 1969
- [Sch1] H. Schubert, Kategorien I und II, Springer 1970
- [Sch2] H. Schubert, Tripel, Manuskript, Univ. Düsseldorf 1970

